RECHERCHES
SUR LA VERITABLE COURBE QUE DÉCRIVENT LES CORPS JETTÉS DANS L'AIR OU DANS UN AUTRE FLUIDE QUELCONQUE,

PAR M. EULER.

1.

Après la découverte de Galilée, que les corps jettés obliquement dans un eſpace vuide décrivent toujours une parabole, on s'eſt bien apperçu, qu'on n'en ſauroit faire l'application pour déterminer le mouvement d'une bombe, ou d'un boulet de Canon. Car, puisque la viteſſe, dont ces corps traverſent l'air, eſt ſi rapide, la réſiſtance de l'air devient ſi grande par rapport à la peſanteur, que ſon effet détourne très conſidérablement ces corps d'une route parabolique; de ſorte que les calculs fondés ſur la nature de la parabole ne ſont plus d'aucun uſage dans ces occaſions. C'eſt dequoi il ne faut pas être ſurpris; puisque Galilée dans ſa recherche n'a tenu compte d'autres forces, qui agiſſent ſur les corps, que de la ſeule force de gravité, n'ayant fait aucune attention à la réſiſtance que les corps éprouvent de la part de l'air.

2. Il y a donc en effet deux forces, à l'action desquelles un corps, qui ſe meut dans un fluide, eſt aſſujetti. L'une eſt la force de gravité, ou la péſanteur du corps, ſur laquelle il faut pourtant remarquer, qu'elle eſt moindre que la peſanteur naturelle du corps, étant diminuée du poids d'un égal volume du fluide, dans lequel le mouvement ſe fait. L'autre force eſt celle de la réſiſtance, qu'on ſait être proportionelle aux quarrés de la viteſſe du corps; & quand le corps eſt un globe, comme on le ſuppoſe ordinairement, la direction de cette

force eſt diamètralement oppoſée à celle du mouvement du corps. Cette force change donc continuellement tant de quantité que de direction, au lieu que la premiere demeure toujours la même. Il s'agit donc de déterminer la courbe, qu'un corps jetté obliquement doit décrire, étant ſollicité par ces deux forces, dont je viens de parler.

3. Quoique cette queſtion ſe réduiſe aiſément à un problème purement analytique, le grand *Newton* y a inutilement travaillé malgré des recherches très ingénieuſes pour arriver à ſa ſolution. Il étoit même le premier qui l'eut entrepriſe ; & ayant ſi bien réüſſi dans la ſuppoſition, que la réſiſtance ſoit proportionnelle à la viteſſe même, il eſt presque inconcevable, qu'il ne ſoit pas venu à bout, lorsque la réſiſtance eſt ſuppoſée proportionelle aux quarrés de la viteſſe, après avoir réſolu quantité de queſtions incomparablement plus difficiles. C'eſt donc feu M. *Jean Bernoulli*, qui a donné le premier la ſolution de ce problème, d'où il a même tiré une conſtruction de la courbe par le moyen des quadratures de quelques courbes transcendantes, dont la deſcription n'eſt cependant pas fort difficile.

4. Voilà donc ce grand probléme réſolu, & même très bien réſolu, il y a longtems. Cependant la ſolution, quelque bonne qu'elle ſoit dans la Théorie, eſt pourtant telle, qu'on n'en a pû tiret jusqu'ici le moindre ſecours pour la Pratique, & pour en corriger la fauſſe Théorie fondée ſur la parabole, à laquelle les Artilleriſtes ſont encore obligés de s'en tenir, quoiqu'ils n'en connoiſſent que trop l'inſuffiſance. Ainſi il eſt certain que cette ſolution n'a apporté aucun avantage réel à l'avancement de l'Artillerie, & il ſemble qu'elle n'a ſervi qu'à mieux aſſeurer les gens du métier de la fauſſeté de leurs principes tirés de la nature de la parabole, auxquels ils ne laiſſent pas d'être réduits encore. C'eſt bien quelque choſe que de ſavoir, que les régles ordinaires trompent ; mais à moins qu'on ne ſache aſſés préciſément, de combien elles trompent en chaque cas, l'avantage ſe réduit à fort peu de choſe.

5. Il

5. Il ſemble auſſi d'abord, que ce ſeroit un ouvrage ſans fin que d'entreprendre d'etablir de nouvelles régles pour le jet des bombes & des boulets de canon, qui ſoient conformes à la véritable courbe, que ces corps décrivent dans l'air. Car comme l'hypotheſe de Galilée ne demande que l'élévation du mortier avec la viteſſe, dont la bombe en ſort, il n'a pas été difficile de calculer des Tables, qui marquent pour tous les cas poſſibles, tant la hauteur à laquelle la bombe arrive, que le point, où elle doit retomber en terre. Mais, ſi l'on vouloit faire de ſemblables Tables, qui ſoient d'accord avec la vérité, il faudroit outre les deux élémens mentionnés encore avoir égard, tant au diamètre de la bombe ou bouler, qu'à ſon poids : & partant on ſeroit dans la néceſſité de calculer de telles tables pour chaque diamètre, & tous les poids qui lui pourroient convenir : ce qui rendroit ſans doute impraticable l'exécution d'un tel ouvrage.

6. Cependant ayant bien peſé toutes ces difficultés, je ne les trouve pas tout à fait inſurmontables ; car j'ai remarqué qu'une infinité de cas, qui ſemblent différens, peuvent être compris dans une même Table ; & quoique, ce nonobſtant, le nombre des cas ne laiſſe pas d'être encore infini, comme ils tiennent un certain ordre entr'eux, il ſuffira d'en calculer un certain nombre, pour en pouvoir tirer enſuite tous les autres par la voye d'interpolation. Tout l'ouvrage ſera donc réduit à un certain nombre de Tables calculées, & à une inſtruction, qui en enſeigne l'uſage ; & cela ſera ſuffiſant pour calculer tous les cas, qui ſe peuvent préſenter dans l'Artillerie, & on ſera en état de les expédier presque auſſi promtement, que dans l'hypotheſe vulgaire de Galilée.

7. Pour mieux expliquer mes idées, je commencerai par tirer la ſolution de cette queſtion des premiers principes de la Mécanique. D'abord donc je conſidére le vrai poids du globe, dont il s'agit de déterminer le mouvement ; & poſant ce poids $= P$, ſoit Π le poids d'un volume égal de l'air, ou du fluide, dans lequel le mouvement ſe fait : cela poſé, on ſait que le poids de ce globe dans le fluide ſera $= P - \Pi$;

ce qui étant la force qui ſollicite le globe actuellement en bas, la force accélératrice de la gravité, qui agit ſur ce globe, ſera $= \frac{P - \Pi}{P}$ $= 1 - \frac{\Pi}{P}$. Cette force accélératrice ſe trouvera donc en retranchant de l'unité la fraction $\frac{\Pi}{P}$, qui marque le rapport de la gravité ſpécifique du fluide à celle du globe. Donc, lorsque le mouvement ſe fait dans l'air, à moins que le globe ne ſoit d'une matiere extrêmement legere, on voit bien, qu'on pourra ſuppoſer ſans erreur cette force accélératrice $= 1$: cependant pour rendre mes recherches générales, j'exprimerai par α dans la ſuite cette force accélératrice de la gravité, de ſorte que $\alpha = 1 - \frac{\Pi}{P}$.

8. Pour découvrir la réſiſtance de ce globe, ſoit d ſon diamétre, & v la hauteur, d'où un corps grave dans le vuide acquiert en tombant la même viteſſe, dont nous ſuppoſons, que le globe ſe meut dans le fluide. Poſant donc le rapport du diamètre à la circonference $= 1 : \pi$, l'aire du plus grand cercle de ce globe ſera $= \frac{1}{4} \pi d d$; donc ſa ſurface $= \pi d d$, & la ſolidité du globe même $= \frac{1}{6} \pi d^3$, qui exprimera donc le volume d'une maſſe du fluide, dont le poids eſt $= \Pi$; ainſi que nous venons de ſuppoſer. Enſuite, ſi un plan égal au grand cercle $\frac{1}{4} \pi d d$ ſe mouvoit directement dans le fluide avec la viteſſe du globe, on ſait que la réſiſtance ſeroit égale au poids d'un cylindre du fluide, dont la baſe ſeroit $= \frac{1}{4} \pi d d$, & la hauteur $= v$: & la ſolidité par conſéquent $= \frac{1}{4} \pi d d v$. Or on ſait auſſi que la réſiſtance du Globe ne vaut que la moitié de celle du grand cercle ; donc la réſiſtance du globe ſera égale au poids d'une maſſe du fluide, dont le volume $= \frac{1}{8} \pi d d v$.

9. Or le poids d'un volume de ce fluide $\frac{1}{6} \pi d^3$ étant $= \Pi$, le poids du volume que nous venons de trouver $\frac{1}{8} \pi d d v$ ſera

$=$

$= \frac{3v}{4d}\Pi$; qui exprime la force de la réſiſtance, & ſi nous la diviſons par la maſſe, ou le poids du globe P, nous aurons la force retardatrice, qui reſulte de la réſiſtance, $= \frac{3v}{4d} \cdot \frac{\Pi}{P}$; & dont la direction eſt contraire au mouvement du globe. Or, puisque tant le diamètre du globe d, que le rapport de ſa gravité ſpécifique à celle du fluide, ou P à Π, eſt ſuppoſé être connu, je poſerai pour abréger $\frac{4d}{3} \cdot \frac{P}{\Pi} = c$, pour avoir la force retardatrice de la réſiſtance $= \frac{v}{c}$. Or l'on voit que pour l'air, la valeur de la fraction $\frac{P}{\Pi}$ ſera toujours un nombre très grand; car ſi le globe n'étoit pas plus peſant qu'un égal volume d'eau, il y auroit $\frac{P}{\Pi} = 850$ ou environ.

10. Le rapport de la gravité ſpecifique du globe & du fluide ſe trouve le plus aiſément par le moyen de l'eau; car ſachant le poids P du globe, on aura d'abord le volume d'une maſſe d'eau, dont le poids eſt auſſi $= P$, puisqu'on connoit le poids d'un pied cubique d'eau. Soit donc e^3 le volume de cette maſſe d'eau dont le poids $= P$, & que la gravité ſpécifique de l'eau ſoit à celle du fluide, dans lequel ſe fait le mouvement comme 1 à μ, & $\frac{1}{\mu} e^3$ ſera le volume de ce fluide, dont le poids eſt $= P$. Or Π marque le poids d'une maſſe du même fluide, dont le volume eſt $= \frac{1}{6}\pi d^3$, d'où nous tirons P: $\Pi = \frac{1}{\mu} e^3 : \frac{1}{6}\pi d^3$, ou $\frac{P}{\Pi} = \frac{6e^3}{\mu\pi d^3}$: donc nous aurons $c = \frac{8e^3}{\mu\pi dd}$. Et

partant ſi le mouvement ſe faiſoit dans l'eau, à cauſe de $\mu = 1$, on auroit $c = \frac{8\,e^3}{\pi\,d\,d}$; or, lorsque le mouvement ſe fait dans l'air, on aura à peu près $c = \frac{6666\,e^3}{\pi\,dd}$, ou $c = \frac{2133\,e^3}{dd}$.

11. Cette formule aura lieu, lorsque le mouvement du globe n'eſt pas trop vite, pour que l'air puiſſe auſſitôt librement remplir l'eſpace, que le globe vient de quitter. Mais ſi le mouvement eſt ſi rapide, que l'air ne ſauroit occuper dans le même inſtant l'eſpace, que le globe laiſſe après ſoi, de ſorte que cet eſpace demeure vuide, du moins pour un inſtant, alors le globe ſoutenant ſur ſa partie d'avant toute la preſſion de l'atmoſphère, qui n'étant pas contrebalancée par une preſſion égale de derriére, il eſt clair que la réſiſtance ſera augmentée de toute la preſſion de l'atmoſphère ſur la partie anterieure du globe. Donc, poſant k pour la hauteur d'une colonne d'eau, qui eſt en équilibro avec l'atmoſphère, cette preſſion ſera égale au poids d'une maſſe d'eau, dont le volume $= \frac{1}{4}\,\pi\,d\,d\,k$; & partant au poids d'une maſſe d'air dont le volume $= 213\,\pi\,ddk = 669\,d\,d\,k$ à peu près.

12. La réſiſtance entiere du globe dans l'air ſera donc dans ce cas égale au poids d'une maſſe d'air, dont le volume $= \frac{1}{4}\,\pi\,dd\,v + 213\,\pi\,ddk$. Donc le poids du globe étant égal au poids d'un volume d'air $= 850\,e^3$, la force retardatrice de la réſiſtance ſera $= \frac{\pi\,dd\,v}{6666\,e^3} + \frac{\pi\,dd\,k}{4\,e^3}$. Or nous venons de poſer $c = \frac{6666\,e^3}{\pi\,dd}$, où bien $\pi\,dd = \frac{6666\,e^3}{c}$; donc la force retardatrice de la réſiſtance ſera $= \frac{v}{c} + \frac{6666\,k}{4\,c} = \frac{v + 1666k}{c}$.

13. Cette force aura donc lieu, lorsque la viteſſe du globe eſt plus grande, que celle dont l'air en vertu de ſon reſſort entreroit dans un

un eſpace vuide. Or le reſſort étant égal au poids d'une colomne de même air, dont la hauteur $= 850k$, la viteſſe dont l'air entrera dans un eſpace vuide ſera duë à la hauteur $850k$; donc, toutes les fois que $v > 850k$, la force retardatrice de la réſiſtance de l'air ſera $= \frac{v + 1666k}{c}$. Or pour l'état ordinaire de l'air, on ſait qu'il eſt environ $k = 33$ pieds; de ſorte que ce cas aura lieu, lorsque $v > 28050$ pieds, ou que le globe parcourt dans une ſeconde un eſpace plus grand que de 1325 pieds.

14. De là on comprend aiſément, que quand même v ſera plus petit que $850\,k$, la force retardatrice de la réſiſtance ne ſera pas ſubitement réduite à $\frac{v}{c}$; & que la preſſion de l'atmoſphère ſera toujours plus petite ſur la partie de derrière du globe que ſur celle d'avant: d'où réſultera une augmentation de la réſiſtance. Ainſi s'il étoit $v = \frac{1}{2} \cdot 850\,k$, la force retardatrice de la réſiſtance ſera $= \frac{v + \frac{1}{2} \cdot 1666\,k}{c}$; & en général lorsque $v = \frac{1}{n} \cdot 850\,k$, cette force deviendra à peu près $= \frac{v + \frac{1}{n} \cdot 1666\,k}{c}$; où bien $= \frac{3v}{c}$. Cependant il s'en faut bien, que cette détermination ſoit aſſés exacte, vu qu'elle dépend de la preſſion de l'atmoſphère ſur le derrière du globe. Or il faut auſſi remarquer que cette recherche n'eſt pas ſuſceptible d'une entiere rigueur de Geometrie, & qu'il faut ſe contenter d'une approximation convenable.

15. Par cette raiſon nous ne nous tromperons gueres, quand nous ſuppoſerons la force retardatrice de la réſiſtance $= \frac{3v}{c}$, quoiqu'elle

qu'elle devienne fauſſe, lorsque $v > 850\,k$. Car, puisque cela ne ſauroit arriver que dans les mouvemens les plus rapides, & que ceux-ci ſont bientôt réduits à une valeur de v au deſſous de $850\,k$, l'erreur qui en réſulte ne ſera pas conſidérable. Donc, au lieu de $c = \frac{6666\,e^3}{\pi\,dd}$. ſi nous ſuppoſons $c = \frac{2222\,e^3}{\pi\,dd}$, ou bien $c = 707 \cdot \frac{e^3}{dd}$, la force retardatrice de la réſiſtance ſera $= \frac{v}{c}$: & nous nous ſervirons de cette formule à l'avenir pour la commodité du calcul: où il faut ſe ſouvenir, que d marque le diamètre du globe, & e^3 le volume d'eau dont le poids eſt égal à celui du globe.

16. Donc, pour déterminer le mouvement d'un globe lancé dans l'air, il faut commencer par meſurer exactement tant ſon diamètre d que ſon poids, auquel on cherchera un volume d'eau également peſant, qui ſoit $= e^3$; & alors on en tirera la valeur de $c = 707 \cdot \frac{e^3}{dd}$: ſur laquelle le calcul doit être fondé. D'où l'on voit déjà que le calcul ſera le même pour tous les globes, dont le poids aura au quarré de leur diamètre le même rapport. Cependant on ne ſauroit nier, que le nombre 707 n'eſt pas trop bien conſtaté, & qu'il eſt même variable à cauſe de la diverſe température de l'air. Mais ce ſera une affaire à laquelle il faut avoir égard dans l'application du calcul aux expériences; & dans le calcul même on regardera la quantité c comme connue, ſans ſe ſoucier, comment elle dépend de la grandeur & du poids du globe. Quand on paſſe enſuite à la pratique, on cherchera par quelque expérience, quelle valeur doit être donnée à la quantité c pour chaque globe propoſé & pour chaque état de l'air.

Fig. 1. 17. Soit donc CNAMH la courbe décrite par un globe dans un fluide quelconque, que α marque la force accélératrice de la gravité, &

& que c ſoit la quantité mentionnée, d'où dépend la réſiſtance. Soit A le point le plus haut de cette courbe, & la horizontale B A E la tangente à ce point ; C N A ſera donc la partie de cette courbe, par laquelle le globe eſt monté, & A M H celle par laquelle il deſcend. Conſiderons ſéparément le mouvement de la montée & de la deſcente, & ſoit pour celle-cy une abſciſſe quelconque priſe ſur la horizontale A P $= x$, l'appliquée verticale qui y répond P M $= y$; & que v ſoit la hauteur duë à la viteſſe du globe en M; de ſorte que la force retardatrice de la réſiſtance y ſera $= \frac{v}{c}$.

18. Décompoſant le mouvement du corps ſelon les directions horizontale A P & la verticale P M, celui cy ſera premièrement accéléré par la force accélératrice de la gravité $= \alpha$. Enſuite la force retardatrice de la réſiſtance $\frac{v}{c}$ agiſſant ſelon la direction de la tangente M T, ſi nous poſons l'élément de la courbe M $m = ds$, il en réſultera une force, qui s'oppoſe au mouvement horizontal, $= \frac{v\,dx}{c\,ds}$; & une qui s'oppoſe au mouvement vertical, $= \frac{v\,dy}{c\,ds}$. Donc ſi nous poſons l'élément du tems $= dt$, de ſorte que $dt = \frac{ds}{\sqrt{v}}$, & que nous prenions cet élément dt pour conſtant, les principes mécaniques de l'accélération nous fourniront ces deux égalités:

$$\frac{2\,ddx}{dt^2} = -\frac{v\,dx}{c\,ds} \quad \& \quad \frac{2\,ddy}{dt^2} = \alpha - \frac{v\,dy}{c\,ds}.$$

19. Puiſque $dt = \frac{ds}{\sqrt{v}}$, nous aurons $v = \frac{ds^2}{dt^2}$, d'où nos deux équations deviendront :

$$\frac{2\,ddx}{dt^2} = -\frac{dx\,ds}{c\,dt^2} \quad \& \quad \frac{2\,ddy}{dt^2} = \alpha - \frac{dy\,ds}{c\,dt^2}$$

Suppoſons de plus $dy = p\,dx$, de ſorte que p exprime la tangente de l'angle PTM, ou de l'inclinaiſon du mouvement du corps à l'horizon, & à cauſe de $ds = dx\sqrt{(1+pp)}$, & de $ddy = pddx + dxdp$, nous aurons ces deux équations :

$$\frac{2ddx}{dt^2} = -\frac{dx^2\sqrt{(1+pp)}}{c\,dt^2} \;\&\; \frac{2pddx}{dt^2} + \frac{2dxdp}{dt^2} = \alpha - \frac{pdx^2\sqrt{(1+pp)}}{c\,dt^2}$$

& ſi nous retranchons de celle-cy la premiere multipliée par p, il reſtera $\frac{2\,dx\,dp}{dt^2} = \alpha$, ou bien $\alpha\,dt^2 = 2\,dx\,dp$; or la premiere donne $-\frac{2\,ddx}{dx^2} = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{c}$. Enfin on aura

$$v = \frac{dx^2\,(1+pp)}{dt^2} = \frac{\alpha\,dx\,(1+pp)}{2\,dp}.$$

20. Parce que $2\,dp = \frac{\alpha\,dt^2}{dx}$; l'autre équation $-\frac{2\,ddx}{dx^2} = \frac{\sqrt{(1+pp)}}{c}$, multipliée par dp ſe réduira à celle-cy $-\frac{2\alpha dt^2\,ddx}{dx^3} = \frac{2\,dp\,\sqrt{(1+pp)}}{c}$ dont l'intégrale à cauſe de l'élément dt conſtant eſt

$$\frac{\alpha\,dt^2}{dx^2} = \frac{2\,dp}{dx} = 2\,C + \tfrac{2}{c}\int dp\,\sqrt{(1+pp)}$$

d'où nous tirons :

$$dx = \frac{dp}{C + \frac{1}{c}\int dp\,\sqrt{(1+pp)}} \;\&\; dy = \frac{p\,dp}{C + \frac{1}{c}\int dp\,\sqrt{(1+pp)}}$$

donc $ds = dx\sqrt{(1+pp)} = \frac{dp\,\sqrt{(1+pp)}}{C + \frac{1}{c}\int dp\,\sqrt{(1+pp)}}$

Enſuite

Enſuite à cauſe de $\alpha\, dt^2 = 2\, dx\, dp$, nous obtiendrons

$$\tfrac{1}{2}\alpha dt^2 = \frac{dp^2}{C + \frac{1}{c}\int dp\sqrt{(1+pp)}} \quad \& \quad dt\sqrt{\tfrac{1}{2}\alpha} = \frac{dp}{\sqrt{(C + \frac{1}{c}\int dp\sqrt{(1+pp)})}}$$

& enfin pour la viteſſe du corps nous aurons :

$$v = \frac{\frac{1}{2}\alpha(1+pp)}{C + \frac{1}{c}\int dp\sqrt{(1+pp)}}.$$

21. Pour la formule intégrale $\int dp\sqrt{(1+pp)}$, qui entre dans ces expreſſions, il eſt évident qu'elle exprime un arc paraboli-que : ou bien on le pourra aſſigner par les logarithmes, puiſque $\int dp\sqrt{(1+pp)} = \frac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)} + \frac{1}{2}l(p+\sqrt{(1+pp)})$; prenant l'intégrale en ſorte qu'il évanouiſſe au cas de $p = 0$, ce qui arrive au ſommet A de la courbe, où la tangente eſt horizontale. Ainſi regardant l'inclinaiſon du mouvement du corps à l'horizon, dont la tangente eſt $= p$, comme connuë, pour l'endroit M, où cela arrive, nous pourrons déterminer l'abſciſſe A P $= x$, l'appliquée P M $= y$; l'arc A M $= s$; la hauteur duë à la viteſſe en M, & enfin le tems, que le corps a mis à parcourir l'arc A M.

22. Poſons pour la conſtante C, qui a été introduite par l'intégration, cette fraction $\frac{n}{c}$, & il eſt clair que n déſignera un nombre abſolu. Enſuite mettons pour abréger $\int dp\sqrt{(1+pp)} = P$. vu que pour chaque valeur de p on peut aiſément trouver celle de P ; & pour la branche AMH, par laquelle le corps deſcend, nous aurons les formules ſuivantes :

$$x = c\int\frac{dp}{n+P}; \quad y = c\int\frac{p\,dp}{n+P}; \quad s = c\int\frac{dp\sqrt{(1+pp)}}{n+p}$$

$$dt\sqrt{\tfrac{1}{2}\alpha} = \frac{dp\sqrt{c}}{\sqrt{(n+P)}} \quad \text{ou} \quad t = \frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{\alpha}}\int\frac{dp}{\sqrt{(n+P)}}$$

$$\& \quad v = \frac{\frac{1}{2}\alpha\cdot c\,(1+pp)}{n+P}.$$

Ces intégrales doivent être priſes en ſorte, qu'elles évanouïſſent dans le cas $p = o$; d'où l'on voit que la hauteur duë à la viteſſe en A ſera $= \frac{\alpha c}{2n}$.

23. Ces mêmes formules ſervent auſſi à exprimer la nature de l'autre branche ANC, que le corps aura décrite en montant ; car on n'a qu'à prendre négative la valeur de p. Ainſi, ſi la direction du mouvement en N fait avec l'horizon un angle dont la tangente $= p$, on aura :

$$AQ = c\int \frac{dp}{n-P}\text{ ; }QN = c\int \frac{pdp}{n-P}\text{ ; \& }AN = c\int \frac{dp\sqrt{(1+pp)}}{n-P},$$

le tems par l'arc $AN = \frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{\alpha}}\int \frac{dp}{\sqrt{(n-P)}}$

la hauteur duë à la viteſſe en $N = \frac{\frac{1}{2}\alpha c(1+pp)}{n-P}$.

D'où l'on voit que dans la branche aſcendante ANC l'inclinaiſon de ſes tangentes à l'horizon ne ſauroit nulle part devenir ſi grande, qu'il fût $P > n$: & là où $P = n$, la viteſſe du corps eſt infinie.

24. Le mouvement du corps, & la courbe qu'il décrit CNAMH, dépend donc de trois conſtantes α, c, & n : dont il faut ſavoir les valeurs pour chaque cas propoſé. La premiere α eſt déterminée par la gravité ſpecifique du fluide à l'égard de celle du globe ; & comme elle n'entre pas dans les formules qui déterminent la nature de la courbe, on la connoitra indépendamment de α : ce n'eſt que le tems & la viteſſe qui en dépendent. La quantité c eſt déterminée par le diamètre & le poids du globe, & comme elle ne fait que multiplier les formules trouvées, elle ne cauſe aucun embarras dans le calcul. Or la troiſième quantité n, qui dépend de la viteſſe imprimée au corps, affecte tellement nos formules, qu'on eſt obligé

gé d'en calculer les valeurs à part pour toutes les différentes valeurs de n.

25. Pour développer mieux la nature de cette courbe, il ſera bon d'avoir auſſi égard au rayon de ſa développée qui meſure ſa courbure dans chacun de ſes points. Or on ſait que poſant $dy = p\,dx$, le rayon de courbure eſt $= \frac{dx\,(1+pp)\,V(1+pp)}{dp}$. Donc, puiſque $\frac{dx}{dp} = \frac{c}{n+P}$ pour la branche deſcendante, le rayon de courbure en M ſera $= \frac{c\,(1+pp)\,V(1+pp)}{n+P}$. Or pour la branche aſcendante en N, où eſt auſſi $dy = p\,dx$, le rayon de courbure ſera $= \frac{c\,(1+pp)\,V(1+pp)}{n-P}$. Ainſi là où $P = n$, & la viteſſe du corps eſt infinie, le rayon de courbure devient auſſi infiniment grand: & l'on voit que dans les deux branches, où leurs tangentes ſont également inclinées à l'horizon, le rayon de courbure, de même que les autres quantités, x, y, s, t, & v, ſont plus grandes dans la branche aſcendante que dans la deſcendante.

26. Donc dans un milieu réſiſtant, les deux branches de la courbe décrite par un corps, ſont diſſemblables, en ſorte que la branche deſcendante eſt plus courbée que l'aſcendante, & le mouvement par celle-cy plus rapide que par celle-là. Or dans le vuide les deux branches ſont, comme on ſait, égales & ſemblables, & le mouvement auſſi le même: ce que nos formules déclarent auſſi évidemment; car pour le vuide la quantité c devient infinie, de même que le nombre n, puiſque $\frac{\alpha c}{2n}$ marque la hauteur duë à la viteſſe en A. Donc

P évanouit par rapport à n, & puisque $\alpha = 1$, ſi nous poſons $\frac{c}{2n} = b$; nous aurons pour le vuide :

$x = 2bp$; $y = bpp$; $s = 2b\int dp\sqrt{(1+pp)}$; $t = 2bp$; & $v = b(1+pp)$, & le rayon de courbure $= 2b(1+pp)^{\frac{3}{2}}$, d'où il eſt évident, que la courbe eſt une parabole, & le mouvement tel, qu'il eſt connu.

27. C'eſt donc de la quantité $P = \int dp\sqrt{(1+pp)}$, que réſulte la différence entre les trajectoires dans le vuide & dans un fluide ; & l'on voit que cette différence ſera d'autant plus grande, plus ſera grande la quantité P par rapport au nombre n. Or la quantité P évanoüit au ſommet A; & de là de part & d'autre elle croit avec l'angle MTP, que la tangente de la courbe fait avec l'horizon; en ſorte que lorsque cet angle devient droit, la quantité P ſera même infinie. Par conſéquent quelque petite que ſoit la réſiſtance, la courbe CNAMH s'ecarte enfin à l'infini de la parabole ; puisqu'en continuant ſes branches il doit arriver néceſſairement, que la quantité P devienne enfin égale au nombre n, quelque grand qu'il ſoit, & qu'elle le ſurpaſſe même infiniment.

28. Mais, lorsqu'on veut ſeulement connoitre une telle partie de la courbe comme NAM, que l'inclinaiſon des tangentes à ſes extrémités M & N ſoit ſi petite, que la quantité P qui en réſulte, ſoit fort petite par rapport au nombre n, alors on pourra trouver des approximations aſſés commodes pour décrire cette portion de la courbe. Car, puisque P eſt fort petite par rapport à n, on aura $\frac{1}{n+P} = \frac{1}{n} - \frac{P}{nn}$ & $\frac{1}{n-P} = \frac{1}{n} + \frac{P}{nn}$; & $\frac{1}{\sqrt{(n+P)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{P}{2n\sqrt{n}}$; & $\frac{1}{\sqrt{(n-P)}} = \frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{P}{2n\sqrt{n}}$. Donc pour la branche deſcendante

AM

AM nous aurons:

$$AP = x = \frac{c}{n}\left(p - \frac{1}{n}\int P\,dp\right) = \frac{c}{n}\left(p - \frac{1}{n}Pp + \frac{1}{3n}\left((1+pp)^{\frac{3}{2}} - 1\right)\right)$$

$$PM = y = \frac{c}{n}\left(\tfrac{1}{2}pp - \frac{1}{n}\int P\,p\,dp\right) = \frac{c}{n}\left(\tfrac{1}{2}pp - \frac{1}{2n}Ppp - \frac{1}{8n}P + \frac{1}{8n}p(1+pp)^{\frac{3}{2}}\right)$$

$$AM = s = \frac{c}{n}\left(P - \frac{1}{n}\int P dp\sqrt{(1+pp)}\right) = \frac{c}{n}\left(P - \frac{1}{2n}PP\right)$$

le tems par $AM = t = \frac{\sqrt{2c}}{\sqrt{an}}\left(p - \frac{1}{2n}Pp + \frac{1}{6n}\left((1+pp)^{\frac{3}{2}} - 1\right)\right)$

la hauteur duë à la viteſſe en M, $v = \frac{ac(1+pp)}{2n}\left(1 - \frac{P}{n}\right)$.

Et prenant p & P négatifs ces mêmes expreſſions ſerviront pour la branche aſcendante AN.

29. Or ces approximations n'auront lieu, que tandis que la quantité P demeure extrémement petite par rapport au nombre n. Donc, plus le nombre n ſera grand, plus ſera auſſi grande la portion de la courbe MAN, qu'on connoitra au juſte par le moyen de ces formules. Mais, dès qu'on en veut connoitre une plus grande portion, ces approximations ne ſont plus d'aucune uſage; & alors, puisqu'il n'y a pas moyen d'intégrer les formules trouvées pour x, y, & le tems t, on ſera réduit à en chercher la valeur par la voye des quadratures. Or, avant que d'entreprendre cet ouvrage, il ſera bon de remarquer quelques phènomenes, que nous decouvre la conſidération de cette courbe.

30. Et d'abord je remarque, que l'arc de la courbe $AM = s$ ſe peut exprimer par un logarithme; car, puisque $dp\sqrt{(1+pp)} = dP$, on aura $s = cf\frac{dP}{n+P}$, & partant $s = cl\frac{n+P}{n}$, puisque en A où $s = 0$, il eſt $P = 0$; & cette formule eſt dèjà fort commode pour

pour décrire la courbe; car calculant pour un grand nombre de valeurs de p, celle de s, on trouvera autant de portions de la courbe, & ſachant de chacune l'inclinaiſon à l'horizon, on en tirera aiſément les portions de l'abſciſſe & de l'appliquée, qui leur conviennent; leſquelles étant ajoutées enſemble donneront tant l'abſciſſe que l'appliquée entiere, qui répondent à chaque point de la courbe. Enſuite, ayant la viteſſe à chaque point de la courbe par la formule $v = \frac{\frac{1}{2}\alpha c(1+pp)}{n+\mathrm{P}}$, chaque particule de la courbe diviſée par $\sqrt{v}$ donnera le tems, que le corps met à la parcourir: & pourvu qu'on prenne les particules de la courbe aſſés petites, on obtiendra aſſés exactement tant la figure de la courbe, que le mouvement du corps.

31. Puisque pour la branche deſcendante nous venons de trouver $s = c\,l\,\frac{n+\mathrm{P}}{n}$, nous voyons que cette courbe approche de plus en plus de la direction verticale, qu'elle n'atteint pourtant qu'à l'infini. Car l'arc s ne devient infini, que lorsque P eſt infini, ce qui arrive, quand p eſt pris infini, ou que la tangente de la courbe devient verticale. Or pour la branche aſcendante ANC, nous aurons l'arc $\mathrm{AN} = -c\,l\,\frac{n-\mathrm{P}}{n} = c\,l\,\frac{n}{n-\mathrm{P}}$; donc cet arc ſera infini, lorsque $\mathrm{P} = n$: de là on obtiendra une certaine valeur pour p, d'où l'on connoitra l'inclinaiſon de la tangente de cette courbe à l'infini, qui ſera ſon aſymtote.

32. Ayant pour la branche aſcendante $v = \frac{\frac{1}{2}\alpha c(1+pp)}{n-\mathrm{P}}$ nous voyons qu'à l'infini où $\mathrm{P} = n$, la viteſſe du corps eſt infinie; & qu'en montant juſqu'en A elle devient continuellement plus petite; car en diminuant p, le numérateur $\frac{1}{2}\alpha c(1+pp)$ en devient plus petit, & le dénominateur $n - \mathrm{P}$ plus grand; l'un & l'autre contribuant à diminuer

diminuer la viteſſe. Or pour la branche deſcendante ayant $v = \frac{\frac{1}{2}\alpha c(1+pp)}{n+P}$; on aura pour le ſommet A, $v = \frac{\alpha c}{2n}$; or de là il ne s'enſuit pas, que plus le corps deſcend, plus auſſi ſon mouvement ſera accéléré; mais plutôt après que le corps aura paſſé par le ſommet A, ſon mouvement ne laiſſera pas de ſouffrir encore quelque diminution, jusqu'à ce qu'il parvienne à un certain point I, où ſa viteſſe ſera la plus petite.

33. Ce point I où le corps aura la moindre viteſſe, ſe trouvera donc en ſuppoſant le differentiel de $\frac{1+pp}{n+P}$ égal à zéro; d'où l'on aura $2p(n+P) = (1+pp)\sqrt{(1+pp)}$. Or ayant $P = \frac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)} + \frac{1}{2}l(p+\sqrt{(1+pp)})$, nous aurons

$$2np + pl(p+\sqrt{(1+pp)}) = \sqrt{(1+pp)}$$

Comme cela arrive ordinairement fort près du point A, la valeur de p ſera fort petite, & partant à peu près:

$P = p + \frac{1}{6}p^3$, & $(1+pp)\sqrt{(1+pp)} = 1 + \frac{3}{2}pp + \frac{3}{8}p^4$

donc: $2np + 2pp + \frac{1}{3}p^4 = 1 + \frac{3}{2}pp + \frac{3}{8}p^4$, où $2np = 1 - \frac{1}{2}pp + \frac{1}{24}p^4$

d'où, à moins que le nombre n ne ſoit très petit, on tirera $p = \frac{1}{2n} - \frac{1}{16n^3}$

pour le point I; & partant la hauteur duë à la plus petite viteſſe en I ſera à peu près $v = \frac{\alpha c}{2n}\left(\frac{4nn+1}{4nn+2}\right)$ ou $v = \frac{\alpha c}{2n}\left(1 - \frac{1}{4nn}\right)$.

34. Depuis ce point I le mouvement du corps ſera de nouveau accéléré; mais quoique l'accélération continuë à l'infini, la viteſſe ne ſurpaſſera jamais une certaine limite; car à l'infini de cette courbe où $p = \infty$, on aura $v = \frac{\frac{1}{2}\alpha c pp}{P}$, puisque n evanouït par rapport à P, dont la valeur

ſera auſſi infinie. Mais à cauſe de $p = \infty$, le nombre $l(p+\sqrt{(1+pp)})$ quoiqu'infini, évanouït par rapport à $p\sqrt{(1+pp)}$, de ſorte que dans ce cas $P = \frac{1}{2}pp$, & partant $v = \alpha c$; qui ſera donc la hauteur duë à la viteſſe, de laquelle le corps en deſcendant par l'arc IMH approche de plus en plus, & qu'il n'atteint qu'à l'infini.

35. Il eſt auſſi à remarquer, que le rayon de courbure en M étant $= \frac{c(1+pp)^{\frac{3}{2}}}{n+P}$, la plus grande courbure ne ſe trouvera pas au ſommet même A, mais à un autre point K dans l'arc deſcendant, qu'on trouvera par la réſolution de cette équation

$$3p(n+P) = (1+pp)\sqrt{(1+pp)}, \text{ ou bien}$$

$$3np + \tfrac{1}{2}pp\sqrt{(1+pp)} + \tfrac{3}{2}pl(p+\sqrt{(1+pp)}) = \sqrt{(1+pp)}$$

Donc, à moins que le nombre n ne ſoit trés petit, il y aura à peu près $p = \frac{1}{3n}$; d'où l'on voit que ce point K ſera plus près du ſommet A, que le point I, où la viteſſe du corps eſt la plus petite.

36. Mais pour la nature de la branche deſcendante AMH, c'eſt encore une queſtion bien importante, ſi elle a une aſymtote verticale comme EF, ou non? c'eſt à dire, ſi en faiſant $p = \infty$ l'abſciſſe x devient infinie, ou ſi elle obtient une valeur finie comme AE, qui donneroit par conſéquent l'aſymtote EF. Il s'agit donc de chercher la valeur de la formule intégrale $\int \frac{dp}{n+P}$ au cas de $p = \infty$; car pour la valeur de l'appliquée $c\int \frac{pdp}{n+P}$, il n'y a aucun doute, qu'elle ne devienne infinie en poſant $p = \infty$. Mais aucune des méthodes, qui ſeroient aſſés propres pour nous marquer ces valeurs, tandis que P eſt plus petit que n, ne ſauroit être employée ici avec ſuccès.

37.

37. Je crois donc, que le plus ſeur moyen ſera de recourir à des limites, en donnant à P ſucceſſivement deux telles valeurs, dont l'une ſeroit trop grande & l'autre trop petite ; en ſorte qu'on puiſſe pour l'un & l'autre cas exprimer l'intégrale $\int \frac{dp}{n+P}$. Or il eſt évident que $\int dp\sqrt{(1+pp)}$, ou P, eſt toujours plus petit que $p\sqrt{(1+pp)}$; & certainement plus grand que p ou $p\sqrt{(1+0pp)}$. Poſons donc pour avoir des limites plus proches ;

$$P = \int dp\sqrt{(1+pp)} = p\sqrt{(1+\delta pp)}$$

& prenant les différentiels nous aurons :

$$\sqrt{(1+pp)}\,(1+\delta pp) = 1+2\delta pp \quad \text{ou bien}$$
$$(1-3\delta)\,pp+\delta(1-4\delta)p^4 = 0$$

d'où l'on voit, que ſi $\delta = \frac{1}{3}$, cette formule eſt < 0, & ſi $\delta = \frac{1}{4}$, elle eſt > 0. Donc nous aurons ces deux limites aſſés approchantes :

$$P < p\sqrt{(1+\tfrac{1}{3}pp)} \quad \& \quad P > p\sqrt{(1+\tfrac{1}{4}pp)}$$

38. Par là nous ſommes aſſeurés, que dans la branche deſcendante il y aura toujours :

$$x > c\int \frac{dp}{n+p\sqrt{(1+\frac{1}{3}pp)}} \;\&\; x < c\int \frac{dp}{n+p\sqrt{(1+\frac{1}{4}pp)}}$$

Dévelopons donc ces deux limites, & pour qu'une ſeule opération y ſuffiſe, poſons $x = c\int \frac{dp}{n+p\sqrt{(1+\delta pp)}}$, & ſoit pour dégager l'irrationalité $\sqrt{(1+\delta pp)} = p\sqrt{\delta}+q$, & nous aurons $p = \frac{1-qq}{2q\sqrt{\delta}}$; $\sqrt{(1+\delta pp)} = \frac{1+qq}{2q}$, & $p\sqrt{(1+\delta pp)} = \frac{1-q^4}{4qq\sqrt{\delta}}$

de plus $dp = -\frac{dq(1+qq)}{2qq\sqrt{\delta}}$, & partant :

$$x = -2c\int \frac{dq(1+qq)}{1+4nqq\sqrt{\delta}-q^4}.$$

39. Ce dénominateur ayant deux facteurs réels, poſons les $ff+qq$ & $gg-qq$; & on aura $ffgg = 1$ & $gg-ff = 4n\sqrt{\delta}$

ou bien $ff = \frac{1}{gg}$ & $4n\sqrt{\delta} = \frac{g^4-1}{gg}$. De là notre expression deviendra :

$$x = -2c\left(\frac{1-ff}{ff+gg}\int\frac{dq}{ff+qq} + \frac{1+gg}{ff+gg}\int\frac{dq}{gg-qq}\right)$$

& prenant les intégrales :

$$x = \frac{-2c(1-ff)}{f(ff+gg)}\text{Atang}\frac{q}{f} - \frac{c(1+gg)}{g(ff+gg)}l\frac{g+q}{g-q} + \text{Const.}$$

Or puisque $x = 0$; lorsque $p = 0$ & partant $q = 1$, nous aurons :

$$x = \frac{2c(1-ff)}{f(ff+gg)}\left(\text{Atang}\frac{1}{f} - \text{Atang}\frac{q}{g}\right) + \frac{c(1+gg)}{g(ff+gg)}l\frac{(g+1)(g-q)}{(g-1)(g+q)}$$

ou bien à cause de $f = \frac{1}{g}$;

$$x = \frac{2cg(gg-1)}{1+g^4}(\text{Atang}\,g - \text{Atang}\,gq) + \frac{cg(1+gg)}{1+g^4}l\frac{(g+1)(g-q)}{(g-1)(g+q)}$$

40. Maintenant on n'a qu'à poser $q = 0$, pour avoir le cas de $p = \infty$; & l'abscisse qui répond à l'arc infini AMH sera

$$AE = \frac{2cg(gg-1)}{1+g^4}\text{A tang}\,g + \frac{cg(1+gg)}{1+g^4}l\frac{g+1}{g-1}$$

où il faut remarquer que $gg = 2n\sqrt{\delta} + \sqrt{(1+4\delta nn)}$. Donc prenant $\delta = \frac{1}{3}$, nous aurons $gg = 2n\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{(1+\frac{4}{3}nn)}$ & partant l'intervalle AE sera ou plus grand ou plus petit que cette expression

$$\frac{2cg(gg-1)}{1+g^4}\text{A tang}\,g + \frac{cg(1+gg)}{1+g^4}l\frac{g+1}{g-1}$$

selon qu'on prenne

ou $gg = 2n\sqrt{\frac{1}{3}} + \sqrt{(1+\frac{4}{3}nn)}$

ou $gg = n + \sqrt{(1+nn)}$

41.

41. Lorsque n eſt un nombre très grand, g en ſera un auſſi, & A tang g deviendra $= \frac{\pi}{2}$, prenant π pour la meſure de deux angles droits : donc à cauſe de $l\frac{g+1}{g-1} = \frac{2}{g}$, notre formule ſera $\frac{\pi c}{g} + \frac{2c}{gg}$. Donc ayant ou $gg = 4n\sqrt{\frac{1}{3}}$ ou $gg = 2n$; les limites entre leſquels l'intervalle AE eſt compris, ſeront

$$\frac{\pi c \sqrt{\sqrt{3}}}{2\sqrt{n}} + \frac{c\sqrt{3}}{2n} \quad \& \quad \frac{\pi c \sqrt{2}}{2\sqrt{n}} + \frac{c}{n}$$

Mais, lorsque n eſt une fraction très petite, nous aurons, ou $gg = 1 + 2n\sqrt{\frac{1}{3}}$, ou $gg = 1 + n$; donc à cauſe de A tang $1 = \frac{\pi}{4}$ les limites de l'intervalle AE ſeront :

$$\frac{\pi nc}{2\sqrt{3}} + c\,l\frac{2\sqrt{3}}{n} \quad \& \quad \frac{\pi nc}{4} + c\,l\frac{4}{n}$$

43. La courbe trajectoire donc dans un fluide aura deux aſymtotes, l'une verticale qui eſt convergente avec la branche deſcendante, & l'autre inclinée à l'horizon, pour la branche aſcendante, & qui ſera tellement inclinée à l'horizon, que poſant la tangente de l'inclinaiſon $= p$, on aura $P = n$, ou

$$n = \tfrac{1}{2}p\sqrt{(1+pp)} + \tfrac{1}{2}l(p+\sqrt{(1+pp)})$$

Pour le cas du vuide cette derniere aſymtote devient auſſi verticale, de même que la premiere, & l'une & l'autre ſera infiniment éloignée du ſommet A. Or pour trouver le point L, où l'aſymtote de la branche aſcendante coupe la ligne horizontale BAE, poſant $P = n$, on aura

$$AL = x - \frac{y\,dx}{dy} = c\left(\int\frac{dp}{n-P} - \frac{1}{p}\int\frac{p\,dp}{n-P}\right)$$

43. Après ces remarques générales, venons au fait pour voir, comment on pourroit tirer quelque fruit des formules trouvées pour

la pratique. Et d'abord il eſt évident qu'on ne ſauroit ſe paſſer d'une Table, qui repréſente pour chaque valeur de p celle de P. Donc, puiſque p exprime la tangente de l'angle d'inclinaiſon de la courbe à l'horizon, poſons cet angle $= \Phi$, de ſorte que $p = \text{tang } \Phi$; & à cauſe de $V(1+pp) = \text{ſec. } \Phi$, nous aurons:

$$P = \tfrac{1}{2} \text{ tang } \Phi . \text{ ſec. } \Phi + \tfrac{1}{2} l (\text{tang } \Phi + \text{ſec. } \Phi) \text{ ou bien}$$

$$P = \tfrac{1}{2} \text{ tang } \Phi . \text{ ſec. } \Phi + \tfrac{1}{2} l \text{ tang } (45^\circ + \tfrac{1}{2} \Phi)$$

où il faut prendre les logarithmes hyperboliques de la tangente des angles $45^\circ + \frac{1}{2} \Phi$, qu'on trouve dans l'Ouvrage de Neper ſur les logarithmes.

44. C'eſt donc le contenu de la Table premiere, où la premiere colomne renferme tous les angles d'inclinaiſon à l'horizon de degré en degré depuis 0° juſqu'à 90°: la ſeconde colomne en contient les tangentes, qui ſont les valeurs de la lettre p. La troiſième colomne fournit les valeurs de la formule tang Φ. ſec. Φ ou de $pV(1+pp)$, & la quatrième celles de la formule l tang $(45^\circ + \frac{1}{2} \Phi)$, ou de $l(p + V(1+pp))$; qui eſt la même que la Table des degrés des latitudes croiſſantes dans l'Hydrographie. Enfin la cinquième colomne contient les valeurs correſpondantes de la formule intégrale $P = \int dp V(1+pp)$, dont nous avons beſoin dans nos expreſſions.

45. Or, pour connoître les courbes, qu'un corps peut décrire dans un fluide, il faut remarquer, qu'il y en a une infinité d'eſpeces differentes, qui ſont déterminées par les diverſes valeurs du nombre n. Car, tandis que le nombre n demeure le même, les courbes ſeront toujours ſemblables entr'elles, ou bien de la même eſpece, quelle que ſoit la difference entre les quantités α & c; puiſque celles-cy n'entrent dans le calcul, que pour déterminer la grandeur de la courbe, ſans en changer l'eſpece, & outre cela le mouvement même du corps.

46. Le caractère de ces diverſes eſpeces ſera l'angle OLB, dont l'aſymtote de la branche aſcendante eſt inclinée à l'horizon. Pour connoître cet angle, on n'a qu'à chercher la valeur du nombre n dans

la

la cinquième colomne de notre table, & la premiere colomne indiquera cet angle. Ainſi, ſi $n = 0$, l'angle OLB évanouïra, ou bien l'aſymtote OL ſera horizontale; & le ſommet A ſe trouvera à l'infini. Dans ce cas donc la branche aſcendante de la courbe évanouït, & le corps deſcendra toujours, en approchant de plus en plus de l'autre aſymtote verticale EF : ce ſera donc la premiere eſpece des trajectoires décrites dans un fluide. Fig.

47. Pour les autres eſpeces, on les aura en donnant à n des valeurs affirmatives. Or, quoique le nombre ſoit infini, il ſera bon pour la pratique d'en fixer un certain nombre en donnant à l'angle OLB des valeurs, qui croiſſent de 5 à 5 degrés. Ainſi la ſeconde eſpece ſera, ſi $n = 0,0876001$, où l'angle OLB devient de 5 degrés. Voilà donc les diverſes eſpeces, qu'on pourroit établir. Fig. 1.

Eſpece.	L'angle OLB	valeur du nombre n	Eſpece.	L'angle OLB	valeur du nombre n
1	0°	0,0000000	10	45°	1,1477934
2	5	0,0876001	11	50	1,432362
3	10	0,1772365	12	55	1,822067
4	15	0,2711218	13	60	2,390330
5	20	0,3718537	14	65	3,290396
6	25	0,4826944	15	70	4,884250
7	30	0,6079863	16	75	8,223570
8	35	0,7538161	17	80	17,54793
9	40	0,9291380	18	85	67,12291

L'eſpece ſuivante ou la dix-neuvième renfermeroit les cas, où le globe eſt lancé verticalement en haut: or, puiſque ces cas ſont ſuffiſamment expliqués ailleurs, je n'en tiendrai pas compte ici.

48. On pourroit encore établir autant d'eſpeces, en donnant à n les mêmes valeurs, mais priſes négativement; mais, puiſque dans ces

ces cas les courbes ſont deſtituées de la branche aſcendante, elles ne ſauroient avoir lieu, que lorsque le globe ſeroit d'abord lancé en bas. Or, comme dans l'Artillerie il n'arrive guères ſouvent, qu'on baiſſe les canons ou les mortiers au deſſous de l'horizon, il ſeroit ſuperflu de calculer ces eſpeces; & puisque la direction des canons & mortiers eſt toujours, ou horizontale, ou élevée au deſſus de l'horizon, on peut même ſe paſſer de la premiere eſpece, vu qu'elle n'a jamais lieu dans la pratique.

49. Le plus ſur moyen de calculer chacune des ces eſpeces ſera de partager toute la courbe en pluſieurs morceaux, & d'en calculer chacun à part: car alors on n'aura qu'à raſſembler les calculs de tous ces morceaux. Soit donc M m un tel morceau de la courbe, & ſoit la tangente de l'inclinaiſon en M $= p$ & en $m = q$: & poſant $\int dq\, V(1+qq) = Q$, de même que $\int dp\, V(1+pp) = P$; on aura $AM = cl\frac{n+P}{n}$ & $Am = cl\frac{n+Q}{n}$; donc la portion de l'arc M m ſera $= cl\frac{n+Q}{n+P}$. Enſuite prenant un milieu entre les inclinaiſons en M & m, qui ſoit $= \eta$, on aura pour la portion de l'abciſſe qui répond à cet arc $Pp = c\,\text{cof}\,\eta.\ l\frac{n+Q}{n+P}$; & pour la portion de l'appliquée $pm - PM = c\,\text{ſin}\,\eta.\ l\frac{n+Q}{n+P}$; pourvu que que la difference entre p & q ſoit aſſés petite.

50. Enſuite pour le mouvement même du corps, la hauteur duë à la viteſſe en M ſera $= \frac{\frac{1}{2}ac(1+pp)}{n+P}$, & en $m = \frac{\frac{1}{2}ac(1+qq)}{n+Q}$. Prenant donc un milieu entre les viteſſes, qu'on tire de ces formules, qui ſoit $= Vu$, le tems, que le corps employe à par-

parcourir l'eſpace Mm ſera $= \frac{M\,m}{V\,u}$. Ou bien on prendra un milieu entre les valeurs $\frac{V(1+pp)}{V(n+P)}$ & $\frac{V(1+qq)}{V(n+Q)}$ qui ſoit $= \mu$, & à cauſe de $V\,u = \mu\,V\,\frac{1}{2}\,\alpha\,c$, le tems par l'arc M$m$ ſera $= \frac{V\,2\,c}{V\,\alpha} \cdot \frac{1}{\mu}\,l\,\frac{n+Q}{n+P}$. Et pour avoir ce tems exprimé en minutes ſecondes, ſoit g la hauteur par laquelle un corps tombe dans une ſeconde, & le nombre des ſecondes ſera $= \frac{V\,c}{V\,2\,\alpha g} \cdot \frac{1}{\mu}\,l\,\frac{n+Q}{n+P}$. On pourra de la même maniere exprimer les viteſſes par l'eſpace, qu'elles ſont capables de parcourir dans une ſeconde, & ſur ce pied la viteſſe en M eſt $= V\,2\,\alpha\,c\,g \cdot \frac{V(1+pp)}{V(n+P)}$.

51. Quoiqu'on dût ici prendre les *logarithmes hyperboliques*, on peut pourtant ſe ſervir des logarithmes communs, pourvu qu'on multiplie enſuite les coëfficiens de ces termes par le nombre 2, 302585092994, dont le logarithme commun eſt $= 0,3622156$. Ainſi, en ſe ſervant des logarithmes communs, un arc quelconque de la courbe ſera $2,302585\,c.\,l\,\frac{n+Q}{n+P}$, & ce coëfficient conviendra auſſi aux abſciſſes & appliquées. Enſuite la viteſſe en M ſera exprimée par l'eſpace $V\,2\,\alpha\,c\,g \cdot \frac{V(1+pp)}{V(n+P)}$, qui ſe parcourt dans une ſeconde avec cette viteſſe; & le tems par l'arc Mm ſera de

$$\frac{2,302585\,V\,c}{V\,2\,\alpha\,g} \cdot \frac{1}{\mu}\,l\,\frac{n+Q}{n+P} \text{ ſecondes,}$$

où μ eſt la valeur moyenne entre $\frac{V(1+pp)}{V(n+P)}$ & $\frac{V(1+qq)}{V(n+Q)}$

& g marque la hauteur, d'où un corps tombe dans une ſeconde dans le vuide, & on ſait que $g = 15, 625$ pieds de Rhin.

52. Sur ce pied je calculerai une Table pour l'eſpece douzième où $n = 1, 822067$, qui contiendra deux parties l'une pour la branche aſcendante ANC, l'autre pour la branche deſcendante AMH; elle pourra ſervir de modele pour calculer pareillement des Tables ſemblables pour les autres eſpeces; & à l'aide de 18 Tables de cette forme on ſera en état de réſoudre toutes les queſtions, qui peuvent ſe rencontrer dans l'Artillerie.

53. Par le moyen de cette Table, qui eſt calculée de 5 à 5 degrés, on conſtruira aiſément la forme de la trajectoire de la douzième eſpece; comme elle eſt exprimée dans la troiſième figure. Et lorſqu'on ſait la valeur de la quantité c & de α, on connoitra par cette Tabelle la viteſſe du corps dans chaque point de la courbe, & encore le tems, par chaque partie de la courbe. Ainſi, ſi la direction, ou l'élévation du canon ou du mortier eſt donnée, d'où l'on tire le globe, on cherchera l'élévation dans la premiere colomne de la table pour la branche aſcendante, & la colomne Vme montrera la viteſſe, qui doit être imprimée au globe, pour qu'il décrive une trajectoire de la douzième éſpece. Fig. 3.

54. Prenons pour exemple une bombe, dont le diamètre ſoit $\frac{1}{2}$ pied, & le poids de 64 livres, ou bien égal au poids de $\frac{9}{10}$ pied cubique d'eau. Ayant donc $d = \frac{1}{2}$ & $e^3 = \frac{9}{10}$, nous aurons (15) $c = 707. \frac{1}{2}^8 = 2544$ pieds; & pour α nous prendrons l'unité. Que cette bombe ſoit jettée ſous une élévation de 45° en C, & pour qu'elle décrive une trajectoire de la XIIme eſpece, il faut que ſa viteſſe en C ſoit de $1, 7222525. \sqrt{2\alpha gc}$ pieds par ſeconde, ou qu'elle ſoit capable de parcourir avec cette viteſſe un eſpace de $434\frac{9}{10}$ pieds par ſeconde. Quand ſa viteſſe ſeroit plus grande, la trajectoire appartiendroit à une eſpece anterieure; mais, ſi elle étoit plus petite, à une

eſpece

eſpece ſuivante; & dans ces cas il faudroit avoir calculées les Tables de ces autres eſpeces.

55. Suppoſons donc que la viteſſe initiale de la bombe en C ſoit de 434 $\frac{2}{10}$ pieds par ſeconde, & qu'elle ſoit jettée ſur une plaine horizontale, où elle retombe en E. Soit le ſommet en A, d'où l'on baiſſe la perpendiculaire AD, & la Table pour la branche aſcendante nous donnera

l'intervalle	C D = A B	=	2139, 2 pieds
la hauteur	A D	=	1234, 8 pieds
la courbe même	C A	=	2529, 0 pieds
la viteſſe au ſommet	A	=	208 $\frac{8}{9}$ pieds par ſeconde
le tems de la montée par	C A	=	8, 18 ſecondes.

56. Pour la branche deſcendante il faut chercher par interpolation le point où l'appliquée eſt = 0, 2108126 dans la Table pour cette branche, & on voit que cela arrive entre 60° & 65°, & préciſément à 60°, 13′. Ainſi la bombe tombera en E ſur l'horizon ſous un angle de 60°, 13′: Or de là on trouvera .

l'intervalle	D E	=	1640, 1 pieds
la courbe	A E	=	2153, 6 pieds
la viteſſe en	E	=	275 $\frac{2}{3}$ pied par ſeconde
le tems de la deſcente par	A E	=	9, 50 ſecondes

Ainſi la bombe reſtera dans l'air pendant 17, 68 ou 17$\frac{2}{3}$ ſecondes, & l'amplitude du jet ſera C E = 3779$\frac{1}{3}$ pieds. Cet Exemple ſera ſuffiſant à montrer l'uſage de ces Tables dans la reſolution de toute ſorte de problèmes, qu'on propoſe ordinairement dans l'Artillerie.

ESPECE XII.

Pour le branche aſcendante

Inclin. en N	L'arc AN, $=2{,}302585c$ mult. par	L'abſciſſe AQ $=2{,}302585c$ mult. par	L'appliquée QN $=2{,}302585c$ mult. par	La viteſſe en N $=\sqrt{2ag}c$ mult. par	Le tems par AN $=\frac{2{,}302585\sqrt{c}}{\sqrt{2ag}}$ mult. par
0°	0,0000000 213983	0,0000000 213779	0,0000000 9334	0,7408247 213820	0,0000000″ 284763
5	0,0213983 230448	0,0213779 228477	0,0009334 30080	0,7622067 295427	0,0284763 296594
10	0,0444431 255349	0,0442256 249296	0,0039414 55268	0,7917494 395510	0,0581357 314747
15	0,0699780 291646	0,0691552 278148	0,0094682 87699	0,8313004 523866	0,0896104 340273
20	0,0991426 345303	0,0969700 319018	0,0182381 132142	0,8836870 697094	0,1236377 376196
25	0,1336729 426536	0,1288718 377472	0,0314523 196952	0,9533964 945651	0,1612573 426723
30	0,1763265 555745	0,1666190 468711	0,0511475 298602	1,0479615 1331725	0,2039296 499521
35	0,2319010 778564	0,2134901 617676	0,0810077 473960	1,1811330 2003240	0,2538817 609504
40	0,3097574 1219806	0,2752577 899335	0,1284037 824089	1,3814570 3407955	0,3148321 790812
45	0,4317380 2381005	0,3651912 1608581	0,2108126 1755460	1,7222525 7698425	0,3939133 1149287
50	0,6698385	0,5260493	0,3863586	2,4920950	0,5088420

ESPECE

ESPECE XII. Pour la branche deſcendante.

Inclin. en M	L'arc AM $=2,302585c$	L'abſciſſe AP $=2,302585c$	L'appliquée PM $=2,302585c$	La viteſſe en M $=v2agc$	Le tems par M $=\frac{2,302585\sqrt{c}}{\sqrt{2ag}}$
	mult par	mult. par	mult. par	mult. par	mult. par
0°	0,000000	0,0000000	0,0000000	0,7408247	0,0000000
	203933	203739	8895	— 144229	277997
5	0,0203933	0,0203739	0,0008895	0,7264018	0,0277997
	199209	197505	26002	— 82616	275814
10	0,0403142	0,0401244	0,0034897	0,7181402	0,0553811
	199299	194575	43136	— 25702	278019
15	0,0602441	0,0595819	0,0078033	0,7155700	0,0831830
	204125	194677	61381	+ 28920	284687
20	0,0806566	0,0790496	0,0139414	0,7184620	0,1116517
	214049	197755	81913	83320	296214
25	0,1020615	0,0988251	0,0221327	0,7267940	0,1412731
	229898	203922	106155	139390	313328
30	0,1250513	0,1192173	0,0327482	0,7407330	0,1726059
	253104	213465	135993	198950	337196
35	0,1503617	0,1405638	0,0463475	0,7606280	0,2063255
	285969	226875	174086	263895	369608
40	0,1789586	0,1632513	0,0637561	0,7870175	0,2432863
	332130	244872	224384	336125	413278
45	0,2121716	0,1877385	0,0861945	0,8206300	0,2846141
	397389	268470	292985	417430	472492
50	0,2519105	0,2145855	0,1154930	0,8623730	0,3318633
	491194	299018	389688	509230	553474
55	0,3010299	0,2444873	0,1544618	0,9132960	0,3872107
	629347	338148	530786	611670	667116
60	0,3639646	0,2783021	0,2075404	0,9744630	0,4539223
	841010	388335	745985	720310	832818
65	0,4480656	0,3171356	0,2821389	1,0464940	0,5372041
	1178537	451007	1088830	825390	1084230
70	0,5659193	0,3622363	0,3910219	1,1290330	0,6456271
	1754921	527715	1673697	900010	1495880
75	0,7414114	0,4150078	0,5583916	1,2190340	0,7952151
	2851538	617186	2783950	894400	2257818
80	1,0265652	0,4767264	0,8367866	1,3084740	1,0209969
	5513732	719686	5466560	733500	4100500
85	1,5779384	0,5486950	1,3834426	1,3818240	1,4310469

TABLE Subſidiaire.

ang. Φ	p = tang Φ	tag Φ ſec. Φ	ſtg(45° − ½Φ)	P
°				
0	0,0000000	0,0000000	0,0000000	0,0000000
1	0,0174551	0,0174577	0,0174541	0,0174559
2	0,0349208	0,0349420	0,0349136	0,0349278
3	0,0524078	0,0524797	0,0523838	0,0524318
4	0,0699268	0,0700976	0,0698698	0,0699837
5	0,0874887	0,0878229	0,0873773	0,0876001
6	0,1051042	0,1056832	0,1049116	0,1052974
7	0,1227846	0,1237068	0,1224783	0,1230926
8	0,1405408	0,1419220	0,1400823	0,1410022
9	0,1583844	0,1603587	0,1577296	0,1590442
10	0,1763270	0,1790471	0,1754259	0,1772365
11	0,1943803	0,1980185	0,1931766	0,1955976
12	0,2125566	0,2173052	0,2109876	0,2141464
13	0,2308682	0,2369410	0,2288650	0,2329030
14	0,2493280	0,2569609	0,2468144	0,2518877
15	0,2679492	0,2774014	0,2648421	0,2711218
16	0,2867454	0,2983010	0,2829544	0,2906277
17	0,3057307	0,3197000	0,3011576	0,3104288
18	0,3249197	0,3416408	0,3194582	0,3305495
19	0,3443276	0,3641680	0,3378626	0,3510153
20	0,3639702	0,3873290	0,3563784	0,3718537
21	0,3838640	0,4111741	0,3750122	0,3930932
22	0,4040262	0,4357564	0,3937709	0,4147637
23	0,4244748	0,4611325	0,4126623	0,4368974
24	0,4452287	0,4873633	0,4316947	0,4595290
25	0,4663077	0,5145136	0,4508752	0,4826944
26	0,4877326	0,5426522	0,4702126	0,5064324
27	0,5095254	0,5718538	0,4897151	0,5307845
28	0,5417094	0,6021983	0,5093921	0,5557952
29	0,5543091	0,6337714	0,5292525	0,5815120
30	0,5773503	0,6666666	0,5493059	0,6079863

TABLE Subſidiaire.

ang. Φ	p = tang Φ	tag Φ ſec. Φ	tg(45° + ½Φ)	P
30°	0,5773503	0,6666666	0,5493059	0,6079863
31	0,6008606	0,7009840	0,5695625	0,6352732
32	0,6248694	0,7368323	0,5900326	0,6634325
33	0,6494076	0,7743300	0,6107273	0,6925287
34	0,6745085	0,8136044	0,6316578	0,7226311
35	0,7002075	0,8547958	0,6528363	0,7538161
36	0,7265425	0,8980560	0,6742752	0,7861656
37	0,7535541	0,9435520	0,6959879	0,8197699
38	0,7812856	0,9914657	0,7179875	0,8547266
39	0,8097840	1,0419980	0,7402898	0,8911439
40	0,8390996	1,0953666	0,7629093	0,9291380
41	0,8692867	1,1518160	0,7858627	0,9688398
42	0,9004040	1,2116130	0,8091670	1,0103900
43	0,9325151	1,2750535	0,8328403	1,0539469
44	0,9656888	1,3424655	0,8569016	1,0996840
45	1,0000000	1,4142136	0,8813732	1,1477934
46	1,0355303	1,4907040	0,9062752	1,1984896
47	1,0723687	1,5723920	0,9316313	1,2520116
48	1,1106125	1,6597842	0,9574664	1,3086253
49	1,1503684	1,7534530	0,9838076	1,3686303
50	1,1917536	1,8540400	1,0106827	1,4323614
51	1,2348972	1,9622710	1,0381231	1,5001970
52	1,2799416	2,0789700	1,0661613	1,5725657
53	1,3270448	2,2050705	1,0948332	1,6499519
54	1,3763819	2,3416410	1,1241768	1,7329189
55	1,4281480	2,4899000	1,1542341	1,8220670
56	1,4825600	2,6512520	1,1850503	1,9181512
57	1,5398650	2,8273130	1,2166746	2,0219938
58	1,6003345	3,0199590	1,2491603	2,1345596
59	1,6642795	3,2313720	1,2825662	2,2569691
60	1,7320508	3,4641020	1,3165572	2,3903296

TABLE Subſidiaire.

Ang. Φ	$p = \text{tang } \Phi$	tang Φ ſec. Φ	$\frac{1}{2}\text{tg}(45^\circ + \frac{1}{2}\Phi)$	P
60°	1,7320508	3,464102	1,3165572	2,390330
61	1,8040478	3,721147	1,3524042	2,536776
62	1,8807265	4,006050	1,3889854	2,697518
63	1,9626105	4,323721	1,4267876	2,874904
64	2,0503038	4,677095	1,4659075	3,071501
65	2,1445069	5,074337	1,5064535	3,290396
66	2,2460368	5,522093	1,5485467	3,535320
67	2,3558524	6,029344	1,5923233	3,810834
68	2,4750869	6,607161	1,6379381	4,122549
69	2,6050891	7,269313	1,6855678	4,477441
70	2,7474774	8,033085	1,7354146	4,884250
71	2,9042109	8,920438	1,7877114	5,354075
72	3,0776835	9,959592	1,8427293	5,901161
73	3,2708526	11,187310	1,9007861	6,544048
74	3,4874144	12,652184	1,9622566	7,307220
75	3,7320508	14,419540	2,0275887	8,223570
76	4,0107809	16,578823	2,0973231	9,338073
77	4,3314759	19,255193	2,1721209	10,713657
78	4,7046301	22,628020	2,2528019	12,440411
79	5,1445540	26,961800	2,3403999	14,651100
80	5,6712818	32,65962	2,4362452	17,54793
81	6,3137515	40,36036	2,5420894	21,45123
82	7,1153697	51,12605	2,6603052	26,89318
83	8,1443464	66,82850	2,7942178	34,81136
84	9,5143645	91,02174	2,9486992	46,93522
85	11,4300520	131,11452	3,1313001	67,12291
86	14,300666	205,0084	3,3546723	104,1815
87	19,081137	364,5898	3,6425320	184,1162
88	28,636253	820,5348	4,0481241	412,2915
89	57,289962	3282,639	4,7413471	1643,690
89° 30′	114,58865	13131,06	5,4345129	6568,250
89° 44′	214,85762	45164,31	6,0631256	23085,19
89° 52′	429,71757	184657,7	6,7162739	92332,30
89° 56′	859,43630	738631,4	7,4494211	369319,4
89° 58′	1718,8732	2954526,	8,1421680	1477267,